1. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^3-1}\right)' \cdot \left(1-x^2\right) - \sqrt{x^3-1} \cdot \left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \left(3x^2\right) \cdot \left(1-x^2\right) - \sqrt{x^3-1}\,(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \\
&= \frac{3x^2 \cdot \left(1-x^2\right) + 4x \cdot \left(x^3-1\right)}{2\left(x^2-1\right)^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \\
&= \frac{x^4+3x^2-4x}{2\left((x-1)(x+1)\right)^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \frac{x^3+x^2+4x}{2(x-1)(x+1)^2\sqrt{x^3-1}}
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili toho, že

$$\left(x^4+3x^2-4x\right) : (x-1) = x^3+x^2+4x.$$

Příklad 1 (b) $f(x) = \log\left(\cos\left(e^x\right)\right)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\log\left(\cos\left(e^x\right)\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(e^x\right)} \cdot \left(\cos\left(e^x\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(e^x\right)} \cdot \left(-\sin\left(e^x\right)\right) \cdot e^x = \\
&= -\tan\left(e^x\right) \cdot e^x
\end{aligned}$$

Příklad 1 (c) $f(x) = \left(\cos(2x) - e^{2x}\right)^{-3}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(\cos(2x) - e^{2x}\right)^{-3}\right)' = -3 \cdot \left(\cos(2x) - e^{2x}\right)^{-4} \cdot \left(\cos(2x) - e^{2x}\right)' = \\
&= -3 \cdot \left(\cos(2x) - e^{2x}\right)^{-4} \cdot \left(-\sin(2x) \cdot 2 - 2e^{2x}\right) = \\
&= 6 \cdot \left(\cos(2x) - e^{2x}\right)^{-4} \cdot \left(\sin(2x) + e^{2x}\right)
\end{aligned}$$

Příklad 1 (d) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log\left(x^3-2x+1\right)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log\left(x^3-2x+1\right)\right)' = \\
&= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \cdot \log\left(x^3-2x+1\right) + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\log\left(x^3-2x+1\right)\right)'
\end{aligned}$$

Spočítejme derivace v posledním řádku.

$$\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\left(\log\left(x^3-2x+1\right)\right) = \frac{1}{(x^3-2x+1)} \cdot \left(x^3-2x+1\right)' = \frac{3x^2-2}{(x^3-2x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{\log\left(x^3-2x+1\right)}{x\sqrt{x^2-1}} + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^2-2}{(x^3-2x+1)}$$

Příklad 2 (a) $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x^2y$
$D(f) = \mathbb{R}^2$
Vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ - tj. zderivujme $f(x,y)$ podle x a předstírejme, že y je jen číslo.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\,(35x)}{\partial x} - \frac{\partial\left(4y^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(3x^2y\right)}{\partial x} = 35 - 0 + 6xy = 6xy + 35$$

Dále počítejme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ - tj. předstírejme, že x je číslo a derivujme podle proměnné y.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\,(35x)}{\partial y} - \frac{\partial\left(4y^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(3x^2y\right)}{\partial y} = 0 + 8y + 3x^2 = 8y + 3x^2$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (b) $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$
$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin y^2\right) = \frac{1}{x} \cdot \cos y^2 \cdot 2y = \frac{2y\cos y^2}{x}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x+y)$
$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + \cos(x+y)$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (d) $f(x,y) = x\tan\frac{x}{y}$
Funkce tan není definována pro hodnoty $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tedy $\frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Navíc $y \neq 0$ (podmínka ze zlomku).
$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \tan\frac{x}{y} + x \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \tan\frac{x}{y} + \frac{x}{y\cos^2\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x^2}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (e) $f(x,y) = x^y$
$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$, neb obecná mocnina je definována jen pro kladná x.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y\cdot\log x}\right) = e^{y\cdot\log x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \log x) = e^{y\cdot\log x} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\cdot\log x}\right) = e^{y\cdot\log x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \log x) = e^{y\cdot\log x} \cdot \log x = x^y \log x$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (f) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$
$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

Právě spočítaná derivace je definována pro $\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2} \neq 0$, tj. pro $x \neq -y$. Pro $x = -y$ je třeba derivaci podle x spočítat zvlášť. Zvolme tedy $y \in \mathbb{R}$ a zkusme z definice počítat $f'_x(-y,y)$.

$$\begin{aligned} f'_x(-y,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(-y+t,y) - f(-y,y)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{(t-y)^3 + y^3} - \sqrt[3]{(-y)^3 + y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2y + 3ty^2 - y^3 + y^3} - \sqrt[3]{y^3 - y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \sqrt[3]{\frac{t^3 - 3t^2y + 3ty^2}{t^3}} \overset{\text{spoj.}}{=} \sqrt[3]{\lim_{t \to 0} 1 - \frac{3y}{t} + \frac{3y^2}{t^2}} \end{aligned}$$

Poslední limita nevychází jako reálné číslo, tedy derivace neexistuje.

Jelikož platí $f(x,y) = f(y,x)$, tak platí, že $f'_y(x,y) = f'_x(y,x)$, a proto platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

Stejným způsobem se ukáže, že $f'_y(-y,y)$ neexistuje. Tím jsme vyřešili derivaci na celém, $D(f)$ a máme hotovo.

Příklad 2 (g) $f(x,y) = |x| \cdot |y|$
$D(f) = \mathbb{R}^2$
K vypočtení f'_x si výpočet rozdělme na tři části:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot |y|, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x \cdot |y|, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot |y|) = |y|, \quad x > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x \cdot |y|) = -|y|, \quad x < 0$$

Počítejme $f_x'(0,y)$. Jelikož je zřejmě funkce f v bodě $(0,y)$ spojitá pro libovolné y, můžeme použít větu o spojistosti derivace. Z té vyplývá, že $f_x'^{+}(0,y) = \lim_{x\to 0+} f_x'(x,y) = \lim_{x\to 0+} |y| = |y|$. Podobně $f_x'^{-}(0,y) = -|y|$. Pokud tedy $y \neq 0$, pak $f_x'(0,y)$ neexistuje. Naopak $f_x'(0,0) = 0$.

Zy využutí zřejmého vztahu $f(x,y) = f(y,x)$ dostáváme náasledující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot |x|) = |x|, \quad y > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y \cdot |x|) = -|x|, \quad x < 0$$

A pokud $x \neq 0$, pak $f_y'(x,0)$ neexistuje. Naopak $f_y'(0,0) = 0$.

Tím jsme vyřešili derivaci na celém, $D(f)$ a máme hotovo.

Příklad 2 (h) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y} \cdot \log\left(x^2+y^2\right), & [x,y] \neq [0,0] \\ 0, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

Pro $[x,y] \neq [0,0]$ platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(\frac{\log\left(x^2+y^2\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2+y\right)^2}}\right) + \frac{\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$$

Právě spočtená derivace je definována pro $y \neq -x^2$. Pro $y = -x^2$ je třeba derivaci spočítat zvlášť - z definice (nemáme dokázánu spojitost f v bodě $[0,0]$).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2+2xt}\log\left((x+t)^2+x^4\right)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2+2xt}\log\left(x^2+x^4+2xt+t^2\right)}{t}$$

Je-li $x^2+x^4 \neq 1$, pak $\log\left(x^2+x^4+2xt+t^2\right) \to \log\left(x^2+x^4\right) \neq 0$. Navíc platí, že $\frac{\sqrt[3]{t^2+2xt}}{t} = \sqrt[3]{\frac{t^2+2xt}{t^3}} = \sqrt[3]{\frac{t+2x}{t^2}} \to \frac{2x}{+0} = \operatorname{sign}(x)\cdot\infty$. Z toho nyní plyne, že pro $x^2+x^4 \neq 1$ derivace f'_x v bodě $(x,-x^2)$ neexistuje.

Je-li $x^2+x^4 = 1$, pak $\frac{\sqrt[3]{t^2+2xt}\log\left(x^2+x^4+2xt+t^2\right)}{t} \to \frac{0}{0}$. Použijeme tedy l'Hospitalovo pravidlo (známé z minulého semestru) a počítáme dál. Dotáváme následující limitu (za využití vztahu $x^2+x^4=1$).

$$\lim_{t\to 0}(2x+2t)\cdot\left(\frac{\log\left(1+2xt+t^2\right)}{3\sqrt[3]{(2xt+t^2)^2}} + \frac{\sqrt[3]{2xt+t^2}}{t^2+2xt+1}\right)$$

Platí, že $\frac{\sqrt[3]{2xt+t^2}}{t^2+2xt+1} \to \frac{0}{1}$ pro $t\to 0$.

Platí, že $\frac{\log\left(1+2xt+t^2\right)}{3\sqrt[3]{(2xt+t^2)^2}} \to \frac{0}{0}$, použijeme tedy opět l'Hospitalovo pravidlo a dostáváme násl.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{2t+2x}{1+2xt+t^2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{2x+2t}{\sqrt[3]{(2xt+t^2)^5}}} = \lim_{t\to 0} 2\frac{\sqrt[3]{(2xt+t^2)^5}}{1+2xt+t^2} = 2\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Příklad 2 (i) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}, & [x,y]\neq[0,0] \\ 0, & [x,y]=[0,0]\end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

Pro $[x,y]\neq[0,0]$ platí násl.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}\cdot\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^2}\cdot(2x+y)$$

Pro $[x,y]=[0,0]$ je třeba spočíst f'_x zvlášť.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{(0+t)^2+t\cdot 0+0^2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{t^2}}}{t} = 0$$

Proto $f'_x(0,0)=0$. Výpočet f'_y je obdobný.